Démarche de base en séries temporelles (compléments du Chapitre 1)

Yves Aragon*
Université Toulouse Capitole

28 janvier 2019

Exercice 1.1 (Opérateur retard)
Calculer : (a) $(1-0.9\,\mathrm{B})1$, (b) $(1-0.9\,\mathrm{B})t$, (c) $\frac{1}{1-0.9\,\mathrm{B}}t$, où 1 désigne la fonction constante, et t la fonction $t \mapsto t\ \forall t$.

Réponse

— (a) Opérateur retard appliqué à la fonction constante $t \mapsto 1\ \forall t$,

$$(1-0.9\,\mathrm{B})1 = 1-0.9\,\mathrm{B}1 = 1-0.9 = 0.1$$

et

$$(1-\mathrm{B})1 = 0,$$

tout simplement, l'accroissement d'une fonction constante est nul.

— (b) Opérateur retard appliqué à la fonction $t \mapsto t\ \forall t$

$$(1-0.9\,\mathrm{B})t = t-0.9\,\mathrm{B}t = t-0.9(t-1) = 0.1t+0.9$$

et

$$(1-\mathrm{B})t = t-(t-1) = 1.$$

— (c) Fraction rationnelle de l'opérateur retard :

$$\frac{1}{1-0.9\,\mathrm{B}}1 = (1+0.9\mathrm{B}+(0.9)^2\mathrm{B}^2+\cdots)1 = 1+0.9+(0.9)^2+\cdots = \frac{1}{1-0.9} = 10,$$

$$\frac{1}{1-0.9\,\mathrm{B}}t = (1+0.9\,\mathrm{B}+0.9^2\,\mathrm{B}^2+\cdots)t = t+0.9(t-1)+0.9^2(t-2)+\cdots = t\frac{1}{1-0.9}-0.9\frac{1}{(1-0.9)^2} = \cdots = 10t-90. \quad (1.1)$$

*yves.aragon@gmail.com

Exercice 1.2 (SARMA et opérateur retard)
Ecrire le modèle SARMA (1.2) à l'aide de l'opérateur retard.

$$y_t - 50 = 0.9(y_{t-12} - 50) + z_t - 0.7 z_{t-1}, \tag{1.2}$$

où les z_t sont i.i.d. $\mathcal{N}(0, 17.5)$.

Réponse. Modèle SARMA (1.2) exprimé à l'aide de l'opérateur retard :

$$y_t - 50 = 0.9\,(\mathrm{B}^{12} y_t - 50) + z_t - 0.7\,\mathrm{B} z_t = 0.9\,\mathrm{B}^{12}(y_t - 50) + (1 - 0.7\,\mathrm{B}) z_t \tag{1.3a}$$

$$(1 - 0.9\,\mathrm{B}^{12})(y_t - 50) = (1 - 0.7\,\mathrm{B}) z_t \tag{1.3b}$$

$$y_t - 50 = \frac{1 - 0.7\,\mathrm{B}}{1 - 0.9\,\mathrm{B}^{12}} z_t \tag{1.3c}$$

$$y_t = 50 + \frac{1 - 0.7\,\mathrm{B}}{1 - 0.9\,\mathrm{B}^{12}} z_t. \tag{1.3d}$$

Alternativement, comme $(1 - 0.9\,\mathrm{B}^{12})50 = 0.1 \times 50 = 5$, en multipliant les deux côtés de (1.3d) par $1 - 0.9\,\mathrm{B}^{12}$, on obtient :

$$(1 - 0.9\,\mathrm{B}^{12}) y_t = 5 + (1 - 0.7\,\mathrm{B}) z_t. \tag{1.4}$$

Pour obtenir ces différentes écritures du SARMA (1.2) nous avons exploité le fait, noté plus haut, que l'opérateur retard appliqué à une constante donne cette constante. Chacune de ces écritures a ses mérites et il est important de savoir passer de l'une à l'autre en fonction notamment de l'interlocuteur et des outils informatiques qui privilégient l'une ou l'autre.